ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЙ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Г.В.Голубев

Казанский государственный технический университет им. А.Н.Туполева
420111, Казань, ул. К.Маркса, 10
root@ kaiadm. Kazan.su

На случай нелинейной фильтрации дано обобщение метода определения поля давлений в неоднородной пористой среде, изложенного в совместной с Г.Г.Тумашевым монографии [1] и публикациях [2], [3]. В качестве исходного взят параметрический закон [4], объединяющий в одной записи сразу несколько законов нелинейной фильтрации, что представляется удобным при разработке численных алгоритмов решения задачи, а также при их программной реализации. Рассмотрены случаи, когда закон фильтрации линейный, но проницаемость зависит от давления или градиента давления. Основное уравнение фильтрации тогда тоже является нелинейным по отношению к функции давления. Сформулированы соответствующие краевые задачи и предложены алгоритмы их решения. Рассмотрены примеры.

Движение жидкостей в неоднородной пористой среде описывается следующим дифференциальным уравнением в частных производных

$$\left[k\chi(\beta,p,x,y)p_x\right]_x+\left[k\chi(\beta,p,x,y)p_y\right]_y=ap_t+f. \qquad (1)$$

Уравнение (1) можно назвать основным уравнением фильтрации, и в нем использованы обозначения: χ – функция, зависящая от выбора модели фильтрации; β – предельный градиент давления, при достижении которого скорость фильтрации возрастает для одного класса моделей и начинается движение жидкости для другого класса моделей; p(x,y,t) – давление; k(x,y) – проницаемость пласта; f(x,y,t) – функция плотности распределенных источников и стоков; a – некоторая заданная функция или постоянная; x, y – декартовы координаты; t – время. Нижний индекс означает дифференцирование по соответствующей переменной. Будем считать, что в рассматриваемой области пласта распределенные источники и стоки отсутствуют, работу эксплуатационных и нагнетательных скважин будем моделировать логарифмическими особенностями функции давления известного дебита, жидкость и пористую среду примем несжимаемыми. Пусть фильтрация в пласте подчиняется нелинейному параметрическому закону

$$\bar{v} = -\frac{k}{\mu}\frac{|\nabla p| - \lambda_1 \beta \mu_0}{\lambda_2 \beta + \sqrt{\lambda_3 \beta^2 + |\nabla p|^2}} \nabla p, \ \ \beta = \alpha / \sqrt{k}, \tag{2}$$

где $\bar{v}$ – скорость фильтрации; μ – вязкость жидкости; α – постоянная; λ_1, λ_2, λ_3, μ_0 – параметры, при некоторых значениях которых из (2) в качестве частных случаев получается ряд известных законов фильтрации.

Из (1) и (2) выведем основное уравнение фильтрации в такой форме

$$\begin{gathered}\left[kp_x\left(|\nabla p|\sqrt{k} - \lambda_1 \mu_0 \alpha\right) / \left(\lambda_2 \alpha + \sqrt{\lambda_3 \alpha^2 + k|\nabla p|^2}\right)\right]_x + \\ + \left[kp_y\left(|\nabla p \sqrt{k} - \lambda_1 \mu_0 \alpha\right) / \left(\lambda_2 \alpha + \sqrt{\lambda_3 \alpha^2 + k|\nabla p|^2}\right)\right]_y = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Далее уравнение (3) преобразуем к стандартному для уравнений второго порядка виду

$$a_{11} p_{xx} + 2a_{12} p_{xy} + a_{22} p_{yy} + H(x, y, p, p_x, p_y) = 0, \tag{4}$$

где введены обозначения

$$a_{11} = A + Bp_x^2, \ a_{12} = Bp_x p_y, \ a_{22} = A + Bp_y^2,$$

$$A = k\left(|\nabla p|\sqrt{k} - \lambda_1 \mu_0 \alpha\right) / \left(\lambda_2 \alpha + \sqrt{\lambda_3 \alpha^2 + k|\nabla p|^2}\right),$$

$$B = k^{3/2} / |\nabla p| \left(\lambda_2 \alpha + \sqrt{\lambda_3 \alpha^2 + k|\nabla p|^2}\right) - k^2 \left(|\nabla p|\sqrt{k} - \lambda_1 \mu_0 \alpha\right) / \sqrt{\lambda_3 \alpha^2 + k|\nabla p|^2} \times$$
$$\times \left(\lambda_2 \alpha + \sqrt{\lambda_3 \alpha^2 + k|\nabla p|^2}\right)^2,$$

$$H = \left(k_x p_x + k_y p_y\right)\left(1{,}5|\nabla p|\sqrt{k} - \lambda_1 \mu_0 \alpha\right) / \left(\lambda_2 \alpha^2 + \sqrt{\lambda_3 \alpha^2 + k|\nabla p|^2}\right) -$$
$$-0{,}5\left(k_x p_x + k_y p_y\right) \times k|\nabla p|^2 \left(|\nabla p|\sqrt{k} - \lambda_1 \mu_0 \alpha\right) / \sqrt{\lambda_3 \alpha^2 + k|\nabla p|^2} \times$$
$$\times \left(\lambda_2 \alpha + \sqrt{\lambda_3 \alpha^2 + k|\nabla p|^2}\right)^2$$

Весьма существенным является вопрос о типе уравнения (4), поскольку от этого зависит возможная постановка задачи. Для определения типа нужно исследовать знак дискриминанта $d = a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$. Подставив сюда коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}, получим $d = -A^2 - |\nabla p|^2 AB$. Далее исследуем знак d для определенных законов фильтрации.

1. Закон с предельным градиентом давления:

$$\lambda_1 = \mu_0 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ A = (|\nabla p| - \beta)/|\nabla p| > 0,\ \text{поскольку } |\nabla p| > \beta,$$

β – начальный градиент давления, $B = \beta k/|\nabla p|^3 > 0$, $d < 0$.

2. Гиперболический закон:

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1,\ A = |\nabla p| / \left(\beta + \sqrt{\beta^2 + |\nabla p|^2}\right) > 0,$$

$$B = k^{3/2}\alpha\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + k|\nabla p|^2}\right) / |\nabla p| \sqrt{\alpha^2 + k|\nabla p|^2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + k|\nabla p|^2}\right)^2 > 0,$$

$$d < 0.$$

3. Нелинейный закон фильтрации с параметрами $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$:

$$A = |\nabla p|/(\beta + |\nabla p|) > 0,\ B = 0,\ d < 0.$$

4. Полигональный закон:

$$\lambda_1 = 1,\ \mu_0 = 1 - \mu/\nu,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ A = \left[|\nabla p| - (1 - \mu/\nu)\beta\right] / |\nabla p| > 0,$$

поскольку $\mu/\nu < 1$, (ν – повышенная вязкость жидкости при малых градиентах давления), $1 - \mu/\nu < 1$, $|\nabla p| > \beta$; $B = \mu_0 \alpha k/|\nabla p|^2 > 0$, $d < 0$.

5. Линейный закон фильтрации:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ A = 1 > 0,\ B = 0,\ d < 0.$$

Следовательно, во всех пяти рассмотренных случаях знак дискриминанта d оказался отрицательным и уравнение (4) для этих случаев принадлежит к эллиптическому типу. Преобразованием независимых переменных оно приводится к каноническому виду

$$p_{\zeta\zeta} + p_{\eta\eta} + \phi(\zeta, \eta, p, p_\zeta, p_\eta) = 0,$$

или, если использовать более привычные обозначения, к форме

$$\Delta p + H(x, y, p, p_x, p_y) = 0. \qquad (5)$$

Найдем фундаментальное решение задачи определения поля давлений - в круговом пласте единичного радиуса с одной эксцентричной скважиной. Задача ставится так: в области D с границей ∂D найти решение дифференциального уравнения (5) при выполнении условий:

1) $p(r,\theta) = p_k(\theta)$ при $r = 1$ (краевое условие);

2) В центре скважины A_i функция p имеет логарифмическую особенность, причем

$$\lim_{\gamma_i \to 0}\left(\oint_{\gamma_i} \frac{kh}{\mu}\frac{\partial p}{\partial n}ds\right) = Q_i, \qquad (6)$$

Здесь Q_i – дебит скважины, $\sigma = kh/\mu$ – гидропроводность пласта; γ_i – охватывающий скважину контур, n – внутренняя нормаль к нему, h – толщина пласта.

При решении этой задачи воспользуемся идеей И.Н.Векуа [5] о переходе в уравнении (5) к комплексным переменным $z = x + iy$, $\bar{z} = x = iy$ и о преобразовании его в формально гиперболическое уравнение

$$p_{z\bar{z}} + 0{,}25H(z, \bar{z}, p, p_z, p_{\bar{z}},) = 0. \qquad (7)$$

От уравнения (7) путем интегрирования совершается переход к эквивалентному ему интегро-дифференциальному уравнению

$$p(z,\bar{z}) = \varphi(z) + \psi(\bar{z}) - \frac{1}{4}\int_{z_i}^{z}\int_{z_i}^{\bar{z}} H\left(\zeta, \bar{\zeta}, p, \frac{\partial p}{\partial \zeta}, \frac{\partial p}{\partial \bar{\zeta}}\right)d\zeta d\bar{\zeta}, \qquad (8)$$

где φ и ψ – произвольные аналитические функции своих аргументов, $z_i = x_i + iy_i$; x_i, y_i – координаты центра скважины.

Интегро-дифференциальное уравнение (8) решается методом последовательных приближений:

$$p_o(z,\bar{z}) = \varphi(z) + \psi(\bar{z}),$$

$$p_1(z,\bar{z}) = \varphi(z) + \psi(\bar{z}) - \frac{1}{4}\int_{z_i}^{z}\int_{z_i}^{\bar{z}} H\left(\zeta, \bar{\zeta}, p_o, \frac{\partial p_o}{\partial \zeta}, \frac{\partial p_o}{\partial \bar{\zeta}}\right)d\zeta d\bar{\zeta},$$

$$p_2(z,\bar{z}) = \varphi(z) + \psi(\bar{z}) - \frac{1}{4}\int_{z_i}^{z}\int_{z_i}^{\bar{z}} H\left(\zeta, \bar{\zeta}, p_1, \frac{\partial p_1}{\partial \zeta}, \frac{\partial p_1}{\partial \bar{\zeta}}\right)d\zeta d\bar{\zeta},$$

. . . .

$$p_n(z,\bar{z}) = \varphi(z) + \psi(\bar{z}) - \frac{1}{4}\int_{z_i}^{z}\int_{z_i}^{\bar{z}} H\left(\zeta, \bar{\zeta}, p_{n-1}, \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \zeta}, \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \bar{\zeta}}\right)d\zeta d\bar{\zeta}.$$

Поскольку исходное уравнение (5) действительное, то функции $\varphi(z), \psi(\bar{z})$ должны быть попарно сопряженными и n-е приближение p_n запишется в виде

$$p_n(x,y) = \mathrm{Re}\left[\varphi(z) - \frac{1}{4}\int_{z_i}^{z}\int_{z_i}^{\bar z} H\left(\zeta, \bar\zeta, p_{n-1}, \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \zeta}, \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \bar\zeta}\right) d\zeta d\bar\zeta\right]. \qquad (9)$$

Краевое условие для функции p_n из (9) приводит к равенству

$$\mathrm{Re}\left[\varphi(z) - \frac{1}{4}\int_{z_i}^{z}\int_{z_i}^{\bar z} H\left(\zeta, \bar\zeta, p_{n-1}, \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \zeta}, \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \bar\zeta}\right) d\zeta d\bar\zeta\right]_{r=1} = p_k(\theta). \qquad (10)$$

Правую часть его представим в виде равномерно сходящегося ряда Фурье, а произвольную аналитическую функцию $\varphi(z)$ возьмем в виде суммы логарифмической особенности и регулярной части

$$\varphi(z) = B_i \ln(z - z_i) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n, \qquad (11)$$

где комплексные коэффициенты C_n подлежат определению. Постоянная B_i выражается через дебит скважины по формуле $B_i = Q_i / 2\pi\sigma_i$, $\sigma_i = \sigma(x_i, y_i)$.

Равенство (10) приводит в итоге к алгебраической системе уравнений для определения действительной и мнимой частей коэффициентов C_n. Ограничиваясь M^* первыми коэффициентами, эту систему можно решить на ПЭВМ, используя, например, один из программных продуктов: Mathematica, Maple, Gauss и т. д. В данном случае это делалось с помощью пакета Mathcad 7.0 Professional. Для решения систем уравнений в нем применяются итерационный метод Левенберга-Маркардта или его модификации. Этот метод заимствован в Mathcad-е из свободно распространяемого пакета алгоритмов MINPACK, разработанного в Аргоннской Национальной лаборатории (США). Соответствующая публикация помечена 1980 г. Метод Левенберга-Маркардта является квазиньютоновским методом. На каждом шаге вычисляются первые частные производные от невязок по переменным, относительно которых ищется решение, и составляется соответствующая матрица Якоби. Решается матричное уравнение с матрицей Якоби. Можно использовать также алгоритмы из других пакетов прикладных программ. Найденные численно коэффициенты C_n подставляются в формулу (9), которая и будет представлять в итоге решение задачи.

В случае, когда закон фильтрации линейный, но $k = k(x, y, p)$, основное уравнение (1) имеет вид

$$\Delta p+\frac{k_x}{k}p_x+\frac{k_y}{k}p_y+\frac{k_p}{k}\left[(p_x)^2+(p_y)^2\right]=0. \qquad (12)$$

Таким образом, сразу получается уравнение в форме (5), где

$$H=(\ln k)_x\,p_x+(\ln k)_y\,p_y+(\ln k)_p\left[(p_x)^2+(p_y)^2\right]. \qquad (13)$$

Следовательно, все последующие выкладки остаются в силе.

В случае же линейного закона фильтрации и $k=k(x,y,|\nabla p|)$ основное уравнение (1) принимает вид

$$\begin{gathered}p_{xx}\left[1+(\ln k)_{|\nabla p|}\frac{p_x^2}{|\nabla p|}\right]+p_{yy}\left[1+(\ln k)_{|\nabla p|}\frac{p_y^2}{|\nabla p|}\right]+\\+2p_{xy}(\ln k)_{|\nabla p|}\frac{p_xp_y}{|\nabla p|}+(\ln k)_x p_x+(\ln k)_y p_y=0.\end{gathered} \qquad (14)$$

Обозначим

$$a_{11}=1+(\ln k)_{|\nabla p|}\,{p_x^2}/{|\nabla p|},\; a_{12}=(\ln k)_{|\nabla p|}\,{p_xp_y}/{|\nabla p|},\; a_{22}=1+(\ln k)_{|\nabla p|}\,{p_y^2}/{|\nabla p|},$$

тогда уравнение запишется в виде

$$a_{11}p_{xx}+2a_{12}p_{xy}+a_{22}p_{yy}+(\ln k)_x p_x+(\ln k)_y p_y=0. \qquad (15)$$

Исследуем тип этого уравнения, для чего установим знак дискриминанта

$$d=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-1-\frac{k\,|\nabla p|}{k_{|\nabla p|}}.$$

Из физических соображений следует, что $k>0$ (проницаемость – положительная величина), $k_{|\nabla p|}>0$ (проницаемость с ростом градиента давления возрастает, например, в пласте начинают подключаться к работе новые пропластки). Тогда $d<0$ и, следовательно, уравнение (15) эллиптического типа. С помощью преобразования переменных оно может быть записано в канонической форме (5), далее для решения используется описанный подход.

Остановимся еще на случае, когда проницаемость зависит только от координат. Уравнение (1) тогда записывается в форме

$$\Delta p+(\ln k)_x p_x+(\ln k)_y p_y=0, \qquad (16)$$

а интегро-дифференциальное уравнение (8) имеет вид

$$p(z,\bar{z})=\varphi(z)+\psi(\bar{z})-\frac{1}{2}\int_{z_i}^{z}\int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}}\left[(\ln k)_{\bar{\zeta}}\frac{\partial p}{\partial \zeta}+(\ln k)_{\zeta}\frac{\partial p}{\partial \bar{\zeta}}\right]d\zeta d\bar{\zeta}. \tag{17}$$

В этом случае можно доказать сходимость последовательных приближений к точному решению задачи. Это делается следующим образом. В процессе последовательных приближений функция p_n записывается так:

$$p_n(z,\bar{z})=\varphi(z)+\psi(\bar{z})-\frac{1}{4}\int_{z_i}^{z}\int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}}H\left(\zeta,\bar{\zeta},p_{n-1},\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \zeta},\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \bar{\zeta}}\right)d\zeta d\bar{\zeta}, \tag{18}$$

а производные $\partial p_n/\partial z$ и $\partial p_n/\partial \bar{z}$ имеют вид

$$\frac{\partial p_n}{\partial z}=\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}+\int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}}\left[a(z,\bar{\zeta})\frac{\partial p_{n-1}}{\partial z}+b(z,\bar{\zeta})\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \bar{\zeta}}\right]d\bar{\zeta}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial \psi(\bar{z})}{\partial \bar{z}}+\int_{z_i}^{z}\left[a(\zeta,z)\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \zeta}+b(\zeta,\bar{z})\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \bar{z}}\right]d\zeta. \tag{20}$$

Для доказательства равномерной сходимости последовательностей $\{p_n,\partial p_n/\partial z,\partial p_n/\partial \bar{z}\}$ вычислим разности

$$\omega_n=p_{n+1}-p_n=\int_{z_i}^{z}\int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}}\left[a(\zeta,\bar{\zeta})\frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial \zeta}+b(\zeta,\bar{\zeta})\frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial \bar{\zeta}}\right]d\zeta d\bar{\zeta},$$

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial z}=\frac{\partial p_{n+1}}{\partial z}-\frac{\partial p_n}{\partial z}=\int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}}\left[a(z,\bar{\zeta})\frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial z}+b(z,\bar{\zeta})\frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial \bar{\zeta}}\right]d\bar{\zeta},$$

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial p_{n+1}}{\partial \bar{z}}-\frac{\partial p_n}{\partial \bar{z}}=\int_{z_i}^{z}\left[a(\zeta,\bar{z})\frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial \zeta}+b(\zeta,\bar{z})\frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial \bar{z}}\right]d\zeta,\ (n=1,2,\ldots).$$

Коэффициенты a и b – ограниченные по модулю величины, верхнюю границу которых обозначим C_1. Функцию p_0, ее производные $\partial p_0/\partial z$ и $\partial p_0/\partial \bar{z}$ также можно считать ограниченными величинами с верхней границей C_2 в области D, за исключением малой окрестности скважин.

Получим оценки

$$|\omega_0|<2C_1C_2\frac{\left(|z-z_i|+|\bar{z}-\bar{z}_i|\right)^2}{2!},\ \left|\frac{\partial \omega_0}{\partial z}\right| \text{ и } \left|\frac{\partial \omega_0}{\partial \bar{z}}\right|<2C_1C_2\left(|z-z_i|+|\bar{z}-\bar{z}_i|\right).$$

Далее,

$$|\omega_1| < \frac{(2C_1)^2 C_2}{3!}\left(|z - z_i| + |\bar{z} - \bar{z}_i|\right)^3, \quad \left|\frac{\partial \omega_1}{\partial z}\right| \text{ и } \left|\frac{\partial \omega_1}{\partial \bar{z}}\right| < \frac{(2C_1)^2 C_2}{2!}\left(|z - z_i| + |\bar{z} - \bar{z}_i|\right)^2.$$

Используем метод полной математической индукции. Предположим, что имеют место оценки

$$|\omega_n| < \frac{C_2}{2C_1}(2C_1)^{n+2}\frac{\left(|z - z_i| + |\bar{z} - \bar{z}_i|\right)^{n+2}}{(n+2)!},$$

$$\left|\frac{\partial \omega_n}{\partial z}\right| \text{ и } \left|\frac{\partial \omega_n}{\partial \bar{z}}\right| < \frac{C_2}{2C_1}(2C_1)^{n+2}\frac{\left(|z - z_i| + |\bar{z} - \bar{z}_i|\right)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Из формулы для ω_{n+1} получим

$$|\omega_{n+1}| < C_1\left|\int_{z_i}^{z}\int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}}\left(|\zeta - z_i| + |\bar{\zeta} - \bar{z}_i|\right)^{n+1} d\zeta d\bar{\zeta}\right| <$$

$$< 2C_1\frac{C_2}{2C_1}(2C_1)^{n+2}\frac{1}{(n+1)!}\left|\int_{z_i}^{z}\int_{\bar{z}_i}^{\bar{z}}\left(|\zeta - z_i| + |\bar{\zeta} - \bar{z}_i|\right)^{n+1} d\zeta d\bar{\zeta}\right| =$$

$$= \frac{C_2}{2C_1}\frac{(2C_1)^{n+3}}{(n+2)!}\left|\int_{z_i}^{z}\left[\left(|\zeta - z_i| + |\bar{z} - \bar{z}_i|\right)^{n+2} - |\zeta - z_i|^{n+2}\right]d\zeta\right| =$$

$$= \frac{C_2}{2C_1}\frac{(2C_1)^{n+3}}{(n+3)!}\left[\left(|z - z_i| + |\bar{z} - \bar{z}_i|\right)^{n+3} - |\bar{z} - \bar{z}_i|^{n+3} - |z - z_i|^{n+3}\right]$$

$$< \frac{C_2}{2C_1}\frac{(2C_1)^{n+3}}{(n+3)!}\left(|z - z_i| + |\bar{z} - \bar{z}_i|\right)^{n+3}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\left|\frac{\partial \omega_{n+1}}{\partial z}\right| < \frac{C_2}{2C_1}\frac{(2C_1)^{n+3}}{(n+2)!}\left(|z - z_i| + |\bar{z} - \bar{z}_i|\right)^{n+2},$$

$$\left|\frac{\partial \omega_{n+1}}{\partial \bar{z}}\right| < \frac{C_2}{2C_1}\frac{(2C_1)^{n+3}}{(n+2)!}\left(|z - z_i| + |\bar{z} - \bar{z}_i|\right)^{n+2}.$$

Учтем также, что в области D $|z - z_i| + |\bar{z} - \bar{z}_i| < L$, где L – некоторое число. Тогда нетрудно заметить, что в правых частях последних трех неравенств фигурируют общие члены разложения exp $(2C_1L)$ (с точностью до постоянных множителей). Это говорит о том, что последовательности

$\{p_n\}, \{\partial p_n/\partial z\}, \{\partial p_n/\partial \bar{z}\}$ сходятся равномерно к функциям p, p_z, $p_{\bar{z}}$. Переходя к пределу в формулах (18)-(20), приходим к исходному интегро-дифференциальному уравнению и производным от него по z и $\bar{z}$. Все это говорит о сходимости процесса последовательных приближений к точному решению задачи.

По описанному алгоритму проводились численные расчеты. Представляет интерес рассмотреть прежде всего ситуации, когда существует точное аналитическое решение задачи и можно оценить погрешность приближенного. Они имеются в линейном случае, например, при экспоненциальном, линейном и квадратичном законах изменения проницаемости.

При законе $k = k_0 \exp(\alpha x + \beta y)$ (k_0, α, β = const) целесообразно сначала повернуть систему координат на угол $\gamma = \operatorname{arctg} \beta/\alpha$ и представить проницаемость в виде $k = k_0 \exp(mx)$, $\left(m = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)$. Интегро-дифференциальное уравнение (17) запишется тогда в виде

$$p\left(z,\bar{z}\right) = \varphi(z) + \psi\left(\bar{z}\right) - \lambda \int_{z_i}^{z} \int_{z_i}^{\bar{z}} \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{\partial p}{\partial \bar{\zeta}} \right) d\zeta d\bar{\zeta},\ \lambda = m/4.$$

Здесь мы не будем приводить вид первого и второго приближений для функции давления. Расчеты показали, что при линейном законе изменения проницаемости вклад второго приближения весьма мал и можно ограничиться первым, которое дает по-существу точное решение задачи. Численные расчеты были проведены для двух участков Бавлинского месторождения, использовалась соответствующая техническая документация. Для первого участка приняты следующие значения исходных параметров: μ=2,3 мПа·с, h=11 м, Q=1866 см^3/с, $\bar{p}_к$=13,58 мПа (среднее давление на контуре питания), k_0=0,46, r_1=0,24, θ=3π/2 (полярные координаты скважины), D = 650 м (диаметр выделенной области). Для второго участка исходные данные были близкими, только скважин расположено больше. Сравнение значений давления, вычисленных в узлах сеточной области, с картой изобар показало их достаточную близость. Расхождение в данных составляло сотые доли мПа, что дает относительную погрешность менее 1%.

Из близких работ отметим монографии [6] – [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев Г.В., Тумашев Г.Г. *Фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1972. – 196 с.

2. Голубев Г.В. *К задаче определения поля давлений в неоднородной пористой среде* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1966. – № 4. – С. 152–154.

3. Голубев Г.В. *Об одном методе определения поля давлений в неодронодной пористой среде* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1967. – № 3. – С. 180–182.

4. Мухидинов Н., Мукимов Н., Садыков М.К. *Численное моделирование нелинейной фильтрации.* – Ташкент: «Фан», 1989. – 120 с.

5. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Наука, 1988. – 509 с.

6. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. *Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа.* – М.: Недра, 1972. – 288 с.

7. Котляр Л.М., Скворцов Э.В. *Плоские стационарные задачи фильтрации жидкости с начальным градиентом.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. – 142 с.

8. Мирзаджанзаде А.Х., Ковалев А.Г., Зайцев Ю.В. *Особенности эксплуатации месторождений аномальных нефтей.* – М.: Недра, 1972. – 200 с.